

## SISTEMAS DE ECUACIONES

### 1. Sistemas de ecuaciones de primer grado

#### 1.1 Definición

Un sistema de ecuaciones de primer grado está formado por dos, tres o más ecuaciones dependiendo del número de incógnitas que tengamos. Si tenemos dos incógnitas (x e y) el sistema será de dos ecuaciones. Si tenemos tres incógnitas (x, y, z) el sistema será de tres ecuaciones.

Nosotros vamos a ver los sistemas de primer grado con dos ecuaciones y dos incógnitas que serán de tipo:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right\} \begin{array}{l} x, y \text{ incógnitas} \\ a, b, c, d, e \text{ y } f \text{ son números reales.} \end{array}$$

#### 1.2 Solución

La solución de este tipo de sistemas es un par de números x e y que verifican ambas ecuaciones.

EJEMPLO:

¿Es  $x = 6$  e  $y = 4$  solución del siguiente sistema?  $\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{l} 6 + 4 = 10 \\ 10 = 10 \quad \checkmark \text{ OK} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 - 4 = 2 \\ 2 = 2 \quad \checkmark \text{ OK} \end{array}$$

#### 1.3. Sistemas equivalentes

Son aquellos que tienen la misma solución y se obtienen multiplicando o dividiendo todo miembro de una de las ecuaciones o de ambas.

EJEMPLO:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$$

### 2. Clasificación de los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Compatibles (tienen solución)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinados, solución } (x, y) \\ \text{Indeterminados (soluciones infinitas).} \end{array} \right. \\ \\ \text{Incompatibles (no tienen solución)} \end{array} \right.$$

### 3. Métodos de solución

Los sistemas se pueden resolver analíticamente por tres métodos y la solución debe ser la misma por los tres.

Vamos a utilizar el sistema siguiente, para los tres métodos:

$$\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

### **Método de Igualación**

1º Despejamos la misma incógnita de ambas ecuaciones:

Despejado, obtenemos de la primera ecuación:  $-y = 14 - 4x$ ;  $y = 4x - 14$ , y de la segunda:  $y = \frac{11 - 5x}{2}$

2º Igualamos lo que hemos obtenido y resolvemos la ecuación de primer grado.

$$4x - 14 = \frac{11 - 5x}{2}; \quad 2 \cdot (4x - 14) = 11 - 5x$$

$$8x - 28 = 11 - 5x; \quad 8x + 5x = 11 + 28; \quad 13x = 39; \quad x = \frac{39}{13} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

3º Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en el “paso 2” en cualquiera de las ecuaciones del “paso 1”.

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= 4x - 14 \\ y &= 4 \cdot 3 - 14 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -2}$$

4º Comprobamos que la solución es correcta, sustituyendo la x y la y obtenidas en ambas ecuaciones:

$4x - y = 14$	$5x + 2y = 11$
$4 \cdot 3 - (-2) = 14$	$5 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 11$
$12 + 2 = 14$	$15 - 4 = 11$
$14 = 14$	$11 = 11$

### **Método de Reducción**

1º Igualamos los coeficientes de una de las incógnitas mediante multiplicaciones apropiadas, para intentar eliminar una de las incógnitas, en este caso nos damos cuenta de que si multiplico la primera ecuación por 2, entonces se eliminará la y.

$$2 \cdot (4x - y = 14); \quad 8x - 2y = 28$$

2º Se restan o suman ( en este caso se suman) las dos ecuaciones del nuevo sistema para eliminar las incógnitas de coeficientes iguales.

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 28 \\ 5x + 2y = 11 \\ \hline 3x = 39 \end{array}$$

3º Se resuelve la ecuación de primer grado, que hemos obtenido.

$$3x = 39; \quad x = \frac{39}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

4º Se calcula lo otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del sistema original.

$$4x - y = 14; \quad 4 \cdot 3 - y = 14; \quad \text{despejando } y, \text{ obtenemos } \Rightarrow \quad \boxed{y = -2}$$

5º Comprobación de las soluciones, como en el método anterior.

**Método de sustitución**

1º Despejamos, en la ecuación más fácil, una de las incógnitas.

$$y = -14 + 4x$$

2º Sustituimos en la otra ecuación la incógnita despejada.

$$5x + 2 \cdot (-14 + 4x) = 11$$

3º Resolvemos la ecuación de primer grado.

$$5x + 2 \cdot (-14 + 4x) = 11; 5x - 28 + 8x = 11; 5x + 8x = 11 + 28; 13x = 39; x = \frac{39}{3} \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

4º Sustituimos el resultado de la incógnita en la ecuación que habíamos despejado en el paso 1º para averiguar la otra incógnita.

$$y = 14 - 4 \cdot 3 = 2 \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

5º Comprobamos que las soluciones son correctas.

**4. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones**

- 1º Leer el problema
- 2º Comprender el enunciado
- 3º Identificar los datos e incógnitas.
- 4º Interpretar el enunciado.
- 5º Plantear las ecuaciones.
- 6º Resolver el problema.
- 7º Comprobar el resultado.

EJEMPLO: Halla dos números cuya suma es 14 y su diferencia 8.

PLANTEAMIENTO	RESOLUCIÓN	CONCLUSIÓN
<p>Los números que estamos buscando los llamamos x e y. Leemos el enunciado del problema y pasamos el lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico para encontrar dichos números</p> <p>La suma de ellos es 14, entonces: <math>x + y = 14</math></p> <p>Y su diferencia es 8, entonces: <math>x - y = 8</math></p>		

**EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES**

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por los tres métodos.

a) 
$$\begin{cases} x - y = -18 \\ 10x - 2y = -12 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 6x + 5y = 23 \\ -4x + y = -11 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 38 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ 7x - 6y = 10 \end{cases}$$

2. Un grupo de alumnos, por 3 entradas de patio y 6 de palco ha pagado 100 €. Otro grupo que ha llegado más tarde, por dos entradas de patio y 2 de palco ha pagado 40 €. Calcula los precios de cada localidad.
3. La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. Halla el número primitivo.
4. Si dos CDS y una cinta cuestan 26 € y un CD y una cinta cuestan 18 €. ¿cuál es el precio de los CDS y de las cintas por separado?
5. Hace un año, la edad del padre era 3 veces mayor que la del hijo, pero dentro de 13 años no tendrá más que el doble. Halla las edades del padre y del hijo.
6. La diferencia de dos números es  $\frac{1}{6}$ . El triple del mayor menos el doble del menor es 1. Halla el valor de dichos números.
7. Razona sin resolver si el siguiente sistema es compatible o no. 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$
8. Si un sistema tiene más ecuaciones que incógnitas ¿es siempre incompatible?. Razona la respuesta con un ejemplo.
9. Si un sistema tiene más incógnitas que ecuaciones ¿es siempre compatible?. Razona la respuesta con un ejemplo.